Lycée Ali Bourguiba Bembla Monastir	PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN	$3^{ème}$ sc Prof : Mr Chortani

Il y a trois sortes de matheux : ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas.

Exercice 1

Pour Chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée

1) Si $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$ alors :

a) $\vec{v} = \vec{w}$ b) $\vec{v} - \vec{w}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux c) $\vec{v} - \vec{w}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

2) Si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ alors :

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires c) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

Exercice 2

Soit un triangle ABC tel que AB = $\sqrt{5}$, AC= 1 et BC= $2\sqrt{2}$

1) En utilisant la formule d'Alkashi calculer $B\hat{C}A$.

$\boxed{\text{(Formule d'Alkashi } BA^2 = CB^2 + CA^2 - 2CA \times CB \cos(B\hat{C}A)\text{)}}$

2) a) Montrer qu'il existe un unique point G tel que $2\overrightarrow{GC} - 3\overrightarrow{GA} = \vec{0}$

b) Calculer GA et GC

3) Soit g l'application du plan dans luis même définie par g (M)= $2MC^2 - 3MA^2$

a) Montrer que g (M)= $6 - MG^2$

b) Déterminer l'ensemble des point M tel que g (M)= 2

Exercice 3

Dans un plan apporté a un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points A(3 ;0) ;B(3 ;1) et C(3 ;4).On désigne par D le projeté orthogonal de C sur (OB)

1) a)Calculer $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$

b)En déduire alors BD

c)Calculer cos $(\widehat{OBC})$

2)a)Calculer $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ (On pourra remarquer que $\widehat{ABD} = \widehat{OBC}$

b) Soit (x, y) les coordonnées de D ,en calculant $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ en fonction de x et y deduire les coordonnées de D dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Exercice 4

Dans le plan, on considère un triangle équilatérale ABC tel que BA= a ; où a est un réel strictement positif. Soit I le point tel que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB}$.On désigne par A',B' et J les milieux respectifs de [BC],[AB] et [AI](voir figure ci-dessous)

1) a)Calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$ en fonction de a

b) Vérifier que (AI) ⊥ (AA') en déduire $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CI}$ en fonction de a

c) Montrer que CJIB est un parallélogramme en déduire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BI}$ en fonction de a

2) Calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de a puis Montrer que $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{BJ} = 2a^2$(on pourra remarquer $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{CA}$)

3) Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

Calculer en fonction de a la distance AD

Exercice 5

Dans le plan, une unité étant choisie, on considère un rectangle *ABCD* tel que $AB=\sqrt{2}$, AD=1 ; $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$; *I* désigne le milieu de [*AB*].

Soit (E) l'ensemble des points *M* du plan tels que $MD^2-MB^2=1$.

1. Vérifier que *C* et *I* appartiennent à (E).
2. Déterminer et construire l'ensemble (E)
3. En déduire que les droites (*BD*) et (*CI*) sont perpendiculaires.

Exercice 6

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = a et AC = $2a$.

I désigne le milieu de [AC] et G est le barycentre du système {(A ; 3) ; (B ; –2) ; (C ; 1)}.

1. Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère ABIG. Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC.
2. À tout point M du plan, on associe le nombre réel :

$$f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2.$$

a. Exprimer f(M) en fonction de MG et de a.

b. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : f(M) = $2a^2$.

3. À tout point M du plan, on associe maintenant le nombre réel :

$$h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2.$$

a. Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{U}$ non nul tel que : $h(M) = \overrightarrow{MB}.\vec{U} - 2a^2$.

b. On désigne par (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que : $h(M) = -2a^2$.

Vérifier que les points I et B appartiennent à (Δ), préciser la nature de cet ensemble. Construire (Δ).

4. (Δ) et (Γ) sont sécants en deux points E et F. Montrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

Exercice 7

I)Soit ABC un triangle du plan P tel que : AB = 12, AC = 4 et $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

On pose I = B $*$ C et G le centre de gravité du triangle ABC

1) Calculer BC puis AI

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

b) Calculer GA^2 et $GB^2 + GC^2$

c) Montrer que ; $\forall$ M$\in$P on a : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

En déduire l'ensemble E des points M du plan P tel que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{353}{3}$

II)Soit Γ un cercle de centre O et de rayon R. M est un point du plan P tel que : d = OM < R (M est à l'intérieur de Γ). Une droite Δ passant par M coupe Γ en A et B , une droite Δ' passant par M et perpendiculaire à Δ coupe Γ en C et D. On pose H = A $*$ B et K = C $*$ D

1) Calculer : $OH^2 + OK^2$ et $AB^2 + CD^2$ en fonction de R et d

2) Montrer que ; $\forall$ M$\in$P on a : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4R^2$

Exercice 8

Soit ABCD un carré de coté 10 cm. On considère les points A' , B' , C' et D' respectivement des segments [AB], [BC], [CD] et [DA] tels que : AA' = BB' = CC' = DD' = x

1) Calculer $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'D'}$, en déduire que : (A'B')$\perp$ (A'D') puis que : A'B'C'D' est un carré

2) Calculer l'aire du carré A'B'C'D' en fonction de x

3) Déterminer x pour que cette aire soit minimale

4) Pour quelles valeurs de x cette aire est-t-elle de 82 cm^2 ?